Shimura 対応

坂田　裕（早稲田大学高等学院）

1　Shimura 対応の導入 ([3, 9, 11])

1.1　記号

1．$a \in \mathbb{Z},\ b \in 2\mathbb{Z}+1\,(b \neq 0)$ に対して，$\left(\frac{a}{b}\right)$ は志村によって定義された 2 次剰余記号を表わす；
(1)　$(a,b) \neq 1$ ならば, $\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.
(2)　b が奇素数ならば, $\left(\frac{a}{b}\right)$ は通常の平方剰余記号を表わす.
(3)　$b > 0$ ならば，$a \mapsto \left(\frac{a}{b}\right)$ は b を法とする指標を与える．
(4)　$a \neq 0$ ならば，$b \mapsto \left(\frac{a}{b}\right)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{a})/\mathbb{Q}$ の判別式を導手に持つ指標を与える．
(5)　$a > 0$ (resp. $a < 0$) のとき $\left(\frac{a}{-1}\right) = 1$ (resp. -1).
(6)　$\left(\frac{0}{\pm 1}\right) = 1$.

2．複素数 z, x に対して，$\mathbf{e}(z) = \exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ かつ $z^x = \exp(x\log(z))$ とおく．ただし，$\log(z)$ の分岐は常に $-\pi < \arg(z) \leqq \pi$ にとるものとする．また，複素上半平面，複素 1 次元トーラスをそれぞれ $\mathfrak{H} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $\mathbb{C}_1^\times = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ で表わす．

1.2　Metaplectic 群

整数 k に対して，$GL_2^+(\mathbb{R})$ の $\mathbb{C}_1^\times$ による中心拡大 ($GL_2^+(\mathbb{R})$ の被覆群) $\mathfrak{G}$ を次の様に定義する；

$$\begin{aligned}\mathfrak{G} &= \mathfrak{G}(k+1/2)\\ &= \left\{(\alpha, \varphi(z)) \,\middle|\, \alpha \in GL_2^+(\mathbb{R}),\ \varphi(z) = t(\det\alpha)^{-k/2-1/4}(cz+d)^{k+1/2} \quad (t \in \mathbb{C}_1^\times)\right\}.\end{aligned}$$

$\mathfrak{G}$ は $\mathfrak{H}$ 上定義された複素数値関数 f に $f|\xi = \varphi(z)^{-1}f(\alpha(z)),\quad \xi = (\alpha, \varphi(z)) \in \mathfrak{G}$ で群作用する．

次に $4|N$ の仮定の下で，$\mathfrak{G}$ 上の Fuchs 群を構成しよう．$\theta(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{e}(n^2 z),\ z \in \mathfrak{H}$ の変換公式

$$\frac{\theta(\alpha(z))}{\theta(z)} = j(\alpha, z) = \left(\frac{-1}{d}\right)^{-1/2}\left(\frac{c}{d}\right)(cz+d)^{1/2}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(4),$$

および N を法とする even な Dirichlet 指標 χ を用いて $\Gamma_0(N)$ を $\mathfrak{G}$ 上に次の様に埋め込む；

$$\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi) = \left\{\alpha^* = (\alpha, \chi(d)j(\alpha,z)^{2k+1}) \quad \middle| \quad \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)\right\}.$$

1.3　半整数ウエイトの保型形式

Definition 1. k を整数とし，$4|N$ とする．$\mathfrak{H}$ 上の正則関数 f が次の条件 (1),(2) を満たすとき，f を重さ $k+1/2$，レベル N の正則保型形式 (resp. cusp 形式) とよぶ；
(1)　任意の $\xi \in \widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)$ に対して，$f|\xi = f$.
(2)　f は $\mathrm{Pr}(\widetilde{\Gamma})$ の全ての cusp で正則 (resp. 0) である.
重さ $k+1/2$，レベル N の正則保型形式 (resp. cusp 形式) 全体のなすベクトル空間を $M_{k+1/2}(N,\chi)$ (resp. $S_{k+1/2}(N,\chi)$) とおく．また，$S_{k+1/2}(N,\chi)$ 上で定義される Petersson 内積は $<,>$ で表わす．

1.4 半整数ウエイトの保型形式上の Hecke 理論

$k \in \mathbb{Z},\ 4|N$, 素数 p に対して，$M_{k+1/2}(N,\chi)$ 上の p^2-th Hecke 作用素を

$$\begin{aligned} f|\widetilde{T}(p^2) &= p^{k-3/2} f| \left[\widetilde{\Gamma}_0(N,\chi) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}, p^{k+1/2} \right) \widetilde{\Gamma}_0(N,\chi) \right] \\ &= p^{k-3/2} \sum_{\xi \in \widetilde{\Gamma}_0(N,\chi) \backslash \widetilde{\Gamma}_0(N,\chi) \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{smallmatrix}\right), p^{k+1/2} \right) \widetilde{\Gamma}_0(N,\chi)} f|\xi \end{aligned}$$

で定義する．このとき，$f = \sum_{n\geq 0} a(n)\mathbf{e}(nz) \in M_{k+1/2}(N,\chi)$ に対して，$f|\widetilde{T}(p^2) = \sum_{n \geq 0} b(n)\mathbf{e}(nz)$ の Fourier 係数 $b(n)$ は,

$$b(n) = a(p^2 n) + \chi_1(p) \left(\frac{n}{p} \right) p^{k-1} a(n) + \chi(p^2) p^{2k-1} a(n/p^2)$$

で与えられる．ただし，$\chi_1(m) = \chi(m) \left(\frac{-1}{m} \right)^k$ は N を法とする Dirichlet 指標であり，$p^2 \not| n$ の場合，$a(n/p^2) = 0$ であるとする．さて，$\widetilde{T}(p^2)$ (p は素数) は全て可換となるため，

$$f|\widetilde{T}(p^2) = \omega_p f,\ \omega_p \in \mathbb{C}\ (p\ \text{は任意素数})$$

をみたす Hecke eigen form $f = \sum_{n \geq 0} a(n)\mathbf{e}(nz) \in M_{k+1/2}(N,\chi)$ が存在し，その Dirichlet 級数は Euler 積を持つ； 1 以外の N と素な平方因子を持たない自然数 t に対して，

$$\sum_{n \geq 1} a(tn^2) n^{-s} = a(t) \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \chi_1(p) \left(\frac{t}{p} \right) p^{k-1-s} \right) \left(1 - \omega_p p^{-s} + \chi(p^2) p^{2k-1-2s} \right)^{-1}.$$

1.5 Shimura 対応

Theorem 1. ([9]: Main Theorem)
$k \geq 2,\ 4|N$ とする．$f \in S_{k+1/2}(N,\chi)$ が *Hecke eigen form* であるとき，N と互いに素な，平方因子を持たない自然数 t に付随する上記 *Euler* 積の分母項

$$\begin{aligned} a(t) \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \omega_p p^{-s} + \chi(p^2) p^{2k-1-2s} \right)^{-1} &= \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \chi_1(p) \left(\frac{t}{p} \right) p^{k-1-s} \right)^{-1} \sum_{n\geq 1} a(tn^2) n^{-s} \\ &= \left(\sum_{m \geq 1} \chi_1(m) \left(\frac{t}{m} \right) m^{k-1-s} \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 1} a(tn^2) n^{-s} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{d|n} \chi_1(d) \left(\frac{t}{d} \right) a(tn^2/d^2) d^{k-1} \right) n^{-s} \\ &= \sum_{n \geq 1} A_t(n) n^{-s} \end{aligned}$$

から得られる $\mathcal{S}^{t,\chi}_{k,N}(f) = \sum_{n\geq 1} A_t(n)\boldsymbol{e}(nz)$ は $S_{2k}(N_t, \chi^2)$ *(ただし，N_t は t から定まる自然数)* の元になる．

Remark 1. *Weil* の逆定理を用いた証明から，N_t は次の値にとれる．$\chi_t(m) = \chi(m) \left(\frac{-1}{m} \right)^k \left(\frac{t}{m} \right)$ の導手を M_t, また $t_2 = (t, N)$ とおき，$\chi'(m) = \chi(m) \left(\frac{t_2}{m} \right)$ の導手を M' とする．ここで，$\nu(2) = 4,\ \nu(3) = 2,\ \nu(p) = 1\ (p > 3)$ をみたす数列 $\nu(n)$ に対して，2 つの正整数

$$H = \prod_{p|N,\ p \not| M_t} p^{\nu(p)}, \quad K_0 = \prod_{\substack{p|H \\ (f|\widetilde{T}(p^2))/f \neq 0}} p$$

を定義する．さらに，$N^* = [N, H^2, M']$ としたとき，$N_t = N^*/2K_0$ にとれる．

2　Shimura 対応の積分表示

2.1　Shimura 対応の積分表示 ([1, 2, 5, 7, 10])

Theorem 2. $k>1, N\in\mathbb{N}$ とし，χ は $4N$ を法とする *Dirichlet* 指標とする．ここで，

$$\Omega_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z})=(-1)^k\sum_{n\ge1}\sum_{\substack{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3\\4N^2|a,4N|b\\b^2-4ac=16N^2n}}\chi(c)\overline{(az^2+bz+c)}^{-k}n^{k-\frac{1}{2}}\mathbf{e}(n\tau),\qquad(\tau,z)\in\mathfrak{H}^2$$

とおくとき，任意の $f\in S_{k+1/2}(4N,\chi)$ に対して，

$$\mathcal{S}^{1,\chi}_{k,N}(f)(z)=\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathfrak{H}}f(\tau)\overline{\Omega_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z})}(\mathrm{Im}\tau)^{k+\frac{1}{2}}\frac{dxdy}{y^2}\qquad(\tau=x+iy)$$

が成り立ち，$\mathcal{S}^{1,\chi}_{k,N}(f)(z)\in S_{2k}(2N,\chi^2)$ をみたす．

Proof. $f(\tau)=\sum_{n\ge1}a(n)\mathbf{e}(n\tau)\in S_{k+1/2}(4N,\chi)$ の Fourier 係数 $a(n)$ は，f と Poincaré 級数との内積で表わされる．そこで，

$$\Omega_{k,N,\chi}(\tau,z)=\left(\frac{(4\pi)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}\right)\sum_{n\ge1}n^{k-1}\left(\sum_{d|n}\chi_1(d)(n/d)^kP_{k+\frac{1}{2},4N,(n/d)^2,\chi}(\tau)\right)\mathbf{e}(nz)$$

とおけば，$\Omega_{k,N,\chi}(\tau,z)$ は $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}$ 上で広義一様絶対収束するため

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{1,\chi}_{k,4N}(f)&=\sum_{n\ge1}\left(\sum_{d|n}\chi_1(d)a(n^2/d^2)d^{k-1}\right)\mathbf{e}(nz)\\&=\frac{i_{4N}\,(4\pi)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}\sum_{n\ge1}n^{k-1}\sum_{d|n}\chi_1(d)(n/d)^k<f,P_{k+\frac{1}{2},4N,(n/d)^2,\chi}>\overline{\mathbf{e}(-n\overline{z})}\\&=\int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathfrak{H}}f(\tau)\overline{\Omega_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z})}(\mathrm{Im}\tau)^{k+\frac{1}{2}}\frac{dxdy}{y^2}.\end{aligned}$$

次に，$\Omega_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z})$ を変数 τ に関して Fourier 展開し直せば，

$$\begin{aligned}\Omega_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z})&=(-1)^k\sum_{n\ge1}\overline{\omega_k(z;\chi,n)}n^{k-\frac{1}{2}}\mathbf{e}(n\tau),\\\omega_k(z;\chi,n)&=\sum_{Q\in L_{N,n}}\overline{\chi}(Q)Q(z,1)^{-k},\quad Q(z,1)=(z,1)Q\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる．ここで，$L_{N,n}$ は，$\Gamma_0(2N)$ が $Q\ \mapsto\ Q\circ g={}^tgQg,\ g\in\Gamma_0(2N)$ で群作用する 2 次形式の空間

$$L_{N,n}=\left\{Q=\begin{pmatrix}a&b/2\\b/2&c\end{pmatrix}\ \middle|\ 4N^2|a,\ 4N|b,\ b^2-4ac=16N^2n\right\}$$

を表わし，$Q=\left(\begin{smallmatrix}a&b/2\\b/2&c\end{smallmatrix}\right)$ に対して $\chi(Q)=\chi(c)$ とする．定義から，任意の $g=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_0(2N)$ に対して，

$$\begin{aligned}\omega_k(g(z);\chi,n)&=\sum_{Q\in L_{N,n}}\overline{\chi}(Q)(cz+d)^{2k}\left((z,1){}^tgQg\begin{pmatrix}z\\1\end{pmatrix}\right)^{-k}\\&=\chi(d)^2(cz+d)^{2k}\omega_k(z;\chi,n),\end{aligned}$$

が成り立つため，直ちに $\mathcal{S}^{1,\chi}_{k,N}(f)\in S_{2k}(2N,\chi^2)$ が導かれる．　□

Remark 2. t が基本判別式のときの $\mathcal{S}^{t,\chi}_{k,N}$ については，*2* 次形式上の種指標を用いて積分表示出来る．これについては次々節を参照せよ．

2.2 Shintani 対応 ([2, 5, 10])

志村対応の積分表示から，志村対応の内積に関する共役対応 (新谷対応) を与えることが出来る．なお，t が基本判別式の場合にも同様の結果が得られるが，ここでは $t=1$ の場合に限定して話を進める．

$k>1$, $N\in\mathbb{N}$ とする．$g(z)=\sum_{n\geq 1}b(n)\mathbf{e}(nz)\in S_{2k}(2N,\chi^2)$ に対して，

$$\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi*}(g)(\tau)=\int_{\Gamma_0(2N)\backslash\mathfrak{H}}g(z)\Omega_{k,N,\chi}(\tau,-\overline{z})\mathrm{Im}(z)^{2k}\frac{d\rho d\sigma}{\sigma^2}\quad (z=\rho+i\sigma)$$

とおけば，その定義および Poincaré 級数の性質から $\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi*}(g)\in S_{k+1/2}(4N,\chi)$ が得られる．さらに，g が Hecke eigen form であると仮定して，この積分を計算すれば，

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{k,4N}^{1,\chi*}(g)(\tau) &= C_{N,k}\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{[Q]\in L_{N,n}/\Gamma_1(2N)}\chi(Q)\int_{C_Q}g(z)Q(z,1)^{k-1}dz\right)\mathbf{e}(n\tau)\\ &= d_{N,k}\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{\text{有限個の指標}\,\psi}\ \sum_{0\leq j\leq 2k-2}c_j(\psi,g,n)L(g,j+1,\psi)\right)\mathbf{e}(n\tau)\end{aligned}$$

が得られる．ここで，C_Q は $Q(z,1)=0$ の根を結んだ (向き付けられた) 測地線であり，$C_{N,k}$, $d_{N,k}$, $c_j(\psi,g,n)$ はそれぞれある定数を表わし，$L(g,s,\psi)=\sum_{n\geq 1}\psi(n)b(n)n^{-s}$ とする．

2.3 Kohnen 空間 ([3, 4, 6, 8, 11])

$k\geq 2$ は整数，N は**正奇数**とし，χ を $4N$ を法とする Dirichlet 指標とする．N_1 を χ の導手とし，$\tilde{\chi}$ を χ から誘導される原始指標とする．また，$\chi(-1)=\epsilon$, $N_2=N/N_1$ とそれぞれおく．

$S_{k+1/2}\left(4N,\left(\frac{4\epsilon}{\cdot}\right)\chi\right)$ 上の Kohnen 空間を

$$S_{k+1/2}^{+}(N,\chi)=\left\{f(z)=\sum_{n\geq 1}a(n)\mathbf{e}(nz)\in S_{k+1/2}(4N,\chi)\ \middle|\ a(n)=0\ \text{ if }\ \epsilon(-1)^k n\equiv 2,3\,(4)\right\}$$

で定義するとき，$\epsilon(-1)^kD>0$, $(N,D)=1$ をみたす基本判別式 D に対する $S_{k+1/2}^{+}(N,\chi)$ 上の 志村対応 $\mathcal{S}_{k,4N}^{D,\chi}$ の積分表示は

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{k,4N}^{D,\chi}(f)(z) &= \sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)\chi(d)a(|D|n^2/d^2)d^{k-1}\right)\mathbf{e}(nz)\\ &= \int_{\Gamma_0(4N)\backslash\mathfrak{H}}f(\tau)\overline{\Omega_{k,N,\chi}^{+}(\tau,-\overline{z})}\mathrm{Im}(\tau)^{k+\frac{1}{2}}\frac{dxdy}{y^2},\\ \Omega_{k,N,\chi}^{+}(\tau,z) &= \left(\frac{2\,(4\pi|D|)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{1}{2})}\right)\sum_{n\geq 1}n^{k-1}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)\overline{\chi}(d)(n/d)^k\,\mathrm{Pr}(P_{k+\frac{1}{2},4N,(n/d)^2,\chi}(\tau))\right)\mathbf{e}(nz)\end{aligned}$$

で与えられる．ここで，Pr は $S_{k+1/2}\left(4N,\left(\frac{4\epsilon}{\cdot}\right)\chi\right)$ から $S_{k+1/2}^{+}(N,\chi)$ への射影を表わす．

$k\geq 2$ のとき，$\Omega_{k,N,\chi}^{+}(\tau,z)$ を τ で Fourier 展開すれば，

$$\Omega_{k,N,\chi}^{+}(\tau,z)=C_{k,D,\tilde{\chi}}^{-1}\sum_{\substack{n\geq 1\\ \epsilon(-1)^k n\equiv 0,1\,(4)}}n^{k-\frac{1}{2}}\left(\sum_{t|N_2}\mu(t)\left(\frac{D}{t}\right)\overline{\tilde{\chi}}(t)t^{k-1}\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(tz;D,\epsilon(-1)^kn,\tilde{\chi})\right)\mathbf{e}(n\tau),$$

ただし，C_{k,D,χ_1} は $\tilde{\chi}$ の Gauss 和 $W(\tilde{\chi})$ に付随する定数とし，$\omega_{k,N_1^2,N_2/t}$ は 2 次形式上で定義される種指標 ω_D (詳細は [4];p.238 を参照) で捻った級数である；

$$\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z;D,\epsilon(-1)^kn,\tilde{\chi})=\sum_{\substack{(a,b,c)\in\mathbb{Z}^3\\ b^2-4ac=\epsilon(-1)^kN_1^2Dn\\ (N_1^2N_2/t)|a}}\omega_D(a,b,c)\tilde{\chi}(c)(az^2+bz+c)^{-k}.$$

$\omega_{k,N_1^2,N_2/t}(z;D,\epsilon(-1)^kn,\tilde{\chi})$ は，レベルに関する 2 の寄与が消失して $S_{2k}\left(N_1t,\overline{\tilde{\chi}^2}\right)$ の元になるため，$\mathcal{S}_{k,N}^{D,\chi}(f)(z)\in S_{2k}(N,\chi^2)$ になる．よって，$\mathcal{S}_{k,4N}^{D,\chi}|_{S_{k+1/2}^{+}(N,\chi)}$ による像のレベル N_D は $4N/2$ に止まらず，$4N/4$ まで落ちる．

2.4 Cohen Eisenstein 級数上の Shimura 対応 ([3, 8])

$$
\begin{aligned}
E^{i\infty}_{k+1/2}(z) &= \sum_{\alpha\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(4)} j(\alpha,z)^{-2k-1},\ \ E^0_{k+1/2}=(-1)^k i(z)^{-k-1/2}E^{i\infty}_{k+1/2}\left(-\frac{1}{4z}\right)\in M_{k+1/2}(4,1),\\
H_{k+1/2}(z) &= \zeta(1-2k)\left(E^{i\infty}_{k+1/2}(z)+2^{-2k-1}\left(1-(-1)^k i\right)E^0_{k+1/2}(z)\right)\\
&= \sum_{n\geq 0} H(k;n)\mathbf{e}(nz)
\end{aligned}
$$

で重さ $k+1/2(\geq 5/2)$ の $\Gamma_0(4)$ に関する各 Eisenstein 級数を定義すれば，それらの Fourier 係数から

$$
H(k;n)=\begin{cases}\zeta(1-2k) & \text{if}\quad n=0\\ \dfrac{1}{2}L\left(1-k,\left(\dfrac{\mathfrak{d}_n}{}\right)\right)\displaystyle\sum_{d|\mathfrak{f}_n}\mu(d)\left(\frac{\mathfrak{d}_n}{d}\right)d^{k-1}\sigma_{2k-1}\left(\frac{\mathfrak{f}_n}{d}\right) & \text{if}\quad n\geq 1,\ n\equiv 0,1\ (\mathrm{mod}\,4)\\ 0 & \text{if}\quad n\geq 1,\ n\equiv 2,3\ (\mathrm{mod}\,4)\end{cases}
$$

が得られ，$H_{k+1/2}(z)\in M^+_{k+1/2}(1,1)$ を得る．ただし，$\mathfrak{d}_n$ は $\mathbb{Q}((-1)^k n)/\mathbb{Q}$ の判別式とし，$\mathfrak{f}_n=\sqrt{n|\mathfrak{d}_n|^{-1}}$ とおく．$H(k;n)$ の明示式を基に，$M^+_{k+1/2}(1,1)=\mathbb{C}H_{k+1/2}\oplus S^+_{k+1/2}(1,1)$ から $M_{2k}(1,1)=\mathbb{C}E_{2k}\oplus S_{2k}(1,1)$ (ただし，E_{2k} は正規化された Eisenstein 級数) への写像を次の様に形式的に定義する；

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{k,4}\ :\ M^+_{k+1/2}(1,1) &\quad\to\quad M_{2k}(1,1)\\
\sum_{n\geq 0}a(n)\mathbf{e}(nz) &\quad\mapsto\quad \frac{a(0)}{2}L\left(1-k,\left(\frac{D}{}\right)\right)+\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{d|n}\left(\frac{D}{d}\right)d^{k-1}a\left(\frac{n^2|D|}{d^2}\right)\right)\mathbf{e}(nz),
\end{aligned}
$$

ただし，D は $(-1)^k D>0$ をみたす基本判別式とする．

このとき，$\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{k,4}|_{S^+_{k+1/2}(1,1)}=\mathcal{S}^{D,1}_{k,4}$ であり，かつ次式を得る；

$$
\widetilde{\mathcal{S}}^{D,1}_{k,4}(H_{k+1/2})=\frac{1}{2}L\left(1-k,\left(\frac{D}{}\right)\right)\zeta(1-2k)E_{2k}.
$$

参考文献

(1) 荒川　恒男; 第 *4* 回整数論サマースクール報告集, 99-127 (1996).

(2) B. A. Cipra; On the Niwa-Shintani theta-kernel lifting of modular forms, *Nagoya Math.J.* **91**, 49-117 (1983).

(3) N.Koblitz; Introduction to Elliptic Curves and Modular Forms *Graduate text in Math.* **97**, Springer-Verlag (1993).

(4) W. Kohnen; Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight, *Math. Ann.* **271**, 237-268 (1985).

(5) H. Kojima; Fourier coefficients of modular forms of half integral weight, periods of modular forms and the special values of zeta functions, *Hiroshima Math. J.* **27**, 361-371 (1997).

(6) H. Kojima-Y. Tokuno; On the Fourier coefficients of modular forms of half integral weight belonging to Kohnen's spaces and the critical values of zeta functions, *Tohoku Math. J.* **56**, 125-145 (2004).

(7) G.Lion-M.Vergne; The Weil representation, Maslov index and Theta series. *Progress in Math.* **6**, Birkhäuser (1980).

(8) 坂田　裕; 第 *8* 回整数論サマースクール報告集, 157-189 (2000).

(9) G.Shimura; On modular forms of half-integral weight, *Ann. of Math.* **97**, 440-481 (1973).

(10) G.Shimura; On the Fourier coefficients of Hilbert modular forms of half-integral weight, *Duke Math.J.* **71**, 501-557 (1993).

(11) 上田　勝; 第 *8* 回整数論サマースクール報告集, 23-55 (2000).